د. برهان

جامعة الملك سعود / كلية العلوم قســــم الرياضيات		الفصل الثاني 1433/1432 هـ الزمن// ثلاث ساعات
الإسم / .... رقم الشعبة /	الإختبار النهائي في المقرر 244 ريض	الرقم الجامعي / .... أستاذ المادة / ....

درجة الجزء الأول

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	الدرجة
رمز الإجابة	أ	أ	ب	ب	د	ب	ب	د	ج	أ	

درجة الجزء الثاني

رقم السؤال	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس	الدرجة
الدرجة	$\frac{\quad}{4}$	$\frac{\quad}{3}$	$\frac{\quad}{4}$	$\frac{\quad}{5}$	$\frac{\quad}{7}$	$\frac{\quad}{7}$	

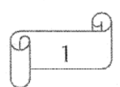
الدرجة النهائية	
	50

لاحظ أن :

(1) عدد الورقات: 10

(2) أستخدم خلف الورقات مع الورقة الإضافية كمسودات بدون نزع الورقة الأخيرة

(3) لا تكتب بقلم الرصاص



الجزء الأول : **[درجتان لكل سؤال]**

ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من 1 إلى 10 في الجدول المعطى :

(1) إذا كان u,v متجهين غير صفريين متعامدين في فضاء ضرب داخلي V فإن مجموعة قيم الثابت k التي تجعل $\|u-3v\|=\|u+kv\|$ هي:

(أ) $\{-3,3\}$ (ب) $\{-3\}$ (ج) ϕ (د) R

(2) إذا كان $T:R^3\to R^3$ تحويلا خطيا معرفا بالقاعدة $T(x,y,z)=(x+y-2z,x-y,-2x+y+z)$ و ليكن كل من $B=\{(1,1,1),(1,-1,0),(0,1,-1)\}$ و $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ أساسا في R^3 حينئذ فإن المصفوفة $[T]_B^S$ تساوي :

(أ) $\begin{bmatrix}0&0&3\\0&2&-1\\0&-3&0\end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix}0&1&3\\1&2&-1\\0&-3&0\end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix}3&0&0\\-1&2&0\\0&-3&0\end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix}0&0&3\\2&0&-1\\-3&0&0\end{bmatrix}$

(3) مجموعة قيم الثابت α التي تجعل المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\\alpha&2&1\\-1&0&3\end{bmatrix}$ قابلة للإستقطار هي :

(أ) $\{1,3\}$ (ب) R (ج) $R\setminus\{1,3\}$ (د) ϕ

(4) إذا كان $T:R^2\to R^3$ تحويلا خطيا حيث $T(1,1)=(1,0,2);T(2,1)=(1,-1,1)$ فإن $T(x,y)$ تساوي:

(أ) $(x,-x+y,x+3y)$ (ب) $(y,-x+y,-x+3y)$

(ج) $(y,x+y,x-3y)$ (د) $(-y,x-y,x+y)$

(5) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}2&x&-1\\1&y&3\\-3&z&4\end{bmatrix}$ و كان $|A|=ax+by+cz$ فإنّ:

(أ) $c=4$ (ب) $c=-4$ (ج) $c=7$ (د) $c=-7$

(6) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}\alpha-4&3&0\\3&\alpha-4&0\\0&0&\alpha-7\end{bmatrix}$ فإن مجموعة قيم الثابت α التي تجعل النظام المتجانس $AX=0$ له عدد غير منته من الحلول هي :

(أ) $\{-1,7\}$ (ب) $\{1,7\}$ (ج) $\{-1,-7\}$ (د) $\{1,-7\}$

(7) إذا كان $W=\left\{\begin{bmatrix}0 & a\\ -a & b\end{bmatrix}, a,b\in R\right\}$ فإن:

(أ) W فضاء جزئي من M_{2x2} و بعده 1
(ب) W فضاء جزئي من M_{2x2} و بعده 2
(ج) W فضاء جزئي من M_{2x2} و بعده 3
(د) W ليس فضاءا جزئيًا من M_{2x2}

(8) القيم المميزة للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ هي:

(أ) $1,2,2$
(ب) $-2,1,2$
(ج) $1,2,-2$
(د) $-1,-1,2$

(9) إذا كانت كل من $B=\{1,x,x^2\}$ و $C=\{1,1+x,(1+x)^2\}$ أساسين في $P_2[x]$ فإنّ مصفوفة الإنتقال ${}_CP_B$ من B إلى C تساوي:

(أ) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$
(ب) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
(ج) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
(د) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(10) إذا كان $T:R^3\to R^4$ تحويلا خطيا حيث $T(x,y,z)=(x-y+2z,x-2y+3z,-x-2y+z,x+y)$ فإن صفرية التحويل الخطي T أي $nullity(T)$ تساوي:

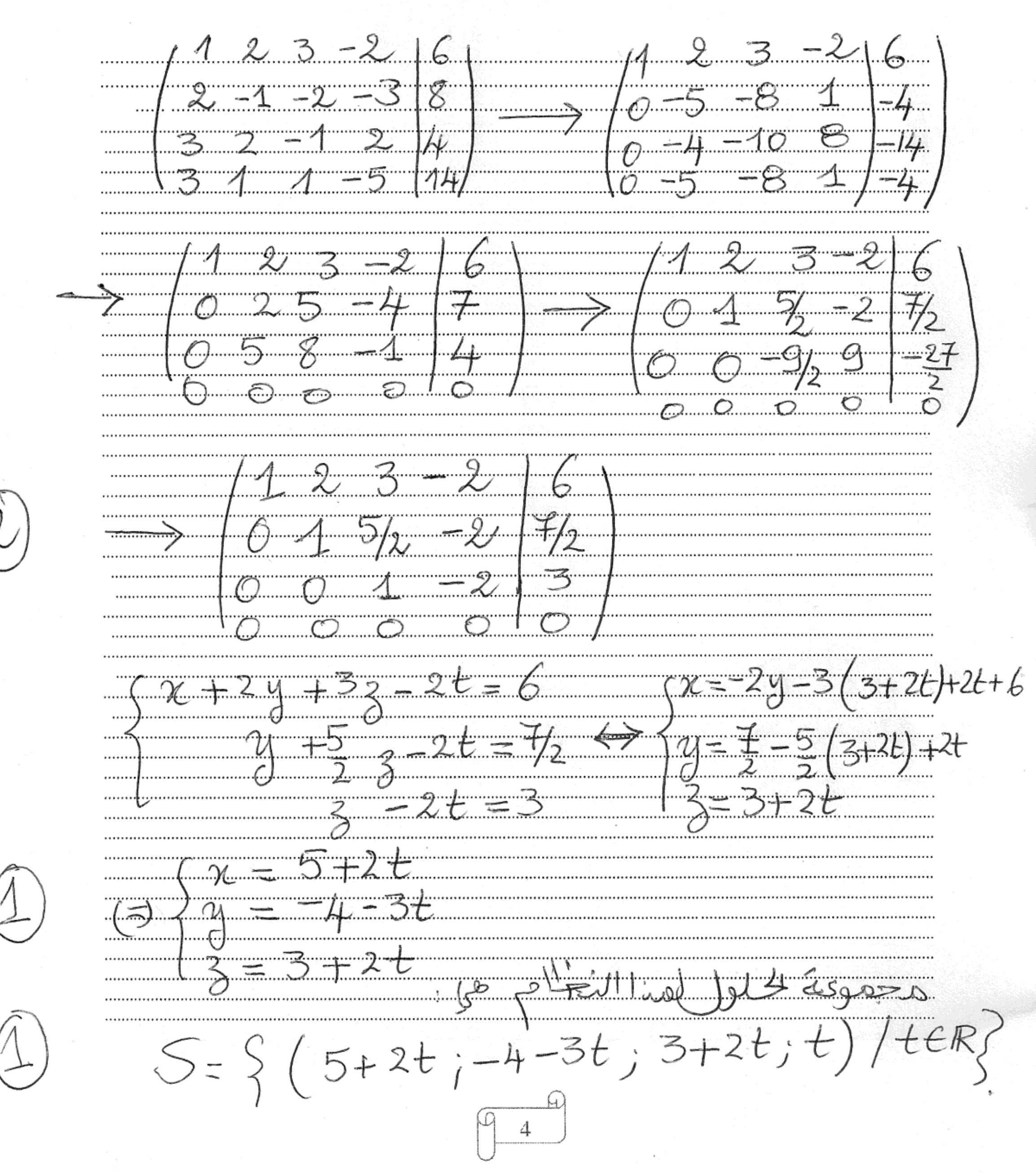
(أ) 1
(ب) 2
(ج) 3
(د) 4

الجزء الثاني : أجب على الأسئلة التالية في نفس ورقة الأسئلة :

السؤال الأول : [4 درجات]

استخدم طريقة جاوس لإيجاد حلول النظام :

$$\begin{aligned} x+2y+3z-2t&=6\\ 2x-y-2z-3t&=8\\ 3x+2y-z+2t&=4\\ 3x+y+z-5t&=14 \end{aligned}$$



السؤال الثاني : [3 درجات]

إستخدم طريقة كرامر لإيجاد كل من y و z في النظام

$$x - y + 2z = 0$$
$$2x - y + 3z = -1$$
$$x + y + 2z = 2$$

هذا النظام يكتب على الشكل

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-2-3+4)-(-2+3-4) = 2 \neq 0$$

بما أن A لها معكوس فباستخدام طريقة كرامر

(1) $$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{(-2+0+8)-(-2+6+0)}{2} = 1$$

(1) $$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{(-2+1+0)-(0-1-4)}{2} = 2$$

السؤال الثالث : [4 درجات]

إذا كان الضرب الداخلي على R^2 معرفا بالقاعدة $<(a,b);(c,d)> = 2ac + bd$ فإستخدم طريقة جرام شميدت لتحويل الأساس $\{u_1 = (1,2); u_2 = (2,1)\}$ إلى أساس عياري متعامد $B = \{w_1; w_2\}$ ثم عين $[v]_B$ حيث $v = (4,3)$

. الأساس المتعامد هو $\{v_1 = u_1 \; ; \; v_2 = u_2 - \frac{<u_2 | v_1>}{\|v_1\|^2} v_1\}$

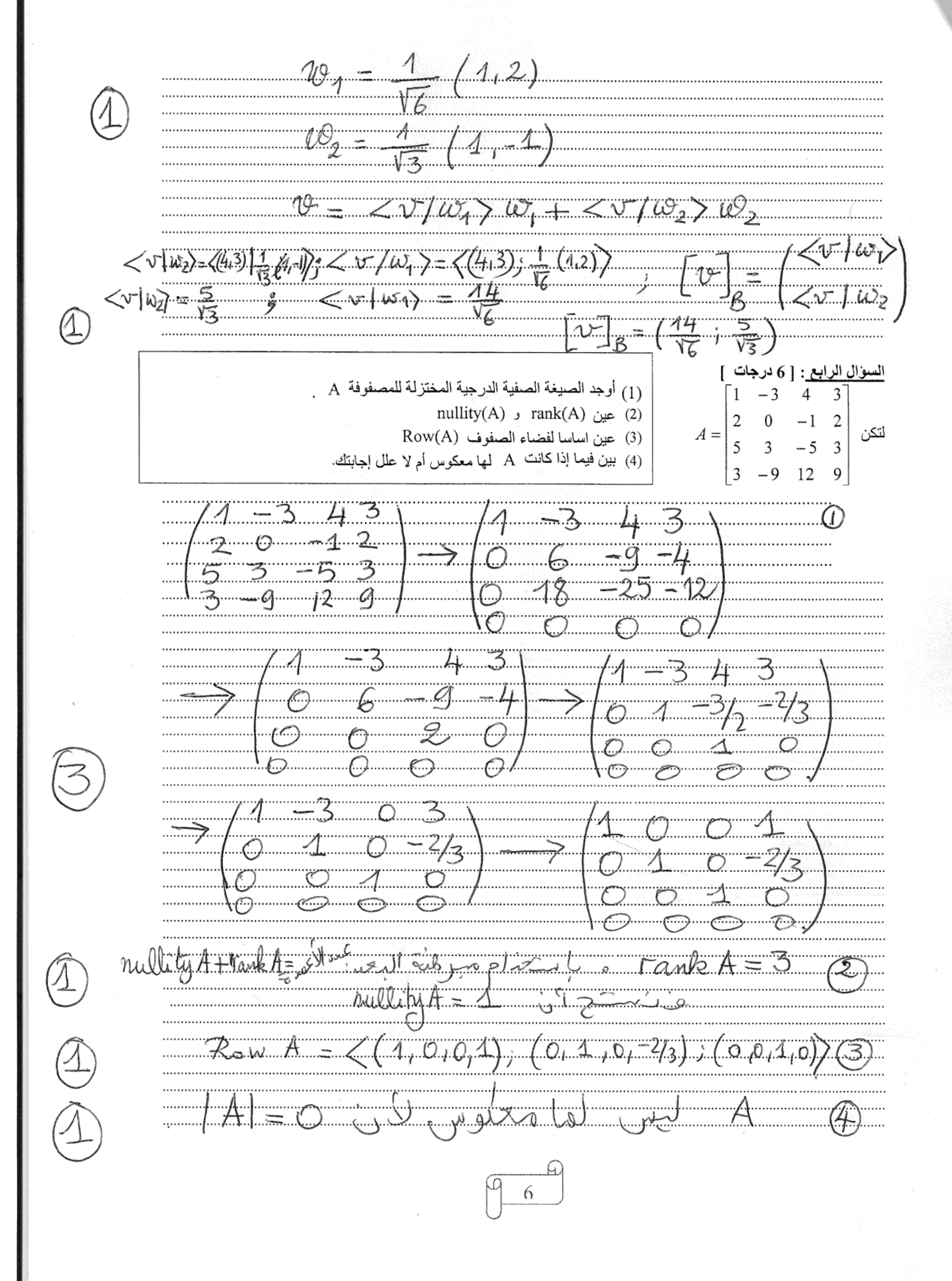
(1) . $v_1 = (1,2)$; $\|v_1\| = \sqrt{<v_1 | v_1>} = \sqrt{<(1,2) | (1,2)>}$

$\|v_1\| = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}$

$v_2 = (2,1) - \frac{<(2,1) | (1,2)>}{6} (1,2)$

(1) . $v_2 = (2,1) - (1,2) = (1,-1)$; $\|v_2\| = \sqrt{<v_2, v_2>} = \sqrt{3}$.

. الأساس العياري المتعامد $B = \{w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \; ; \; w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}\}$



(1)

$w_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2)$

$w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1)$

$v = \langle v | w_1 \rangle w_1 + \langle v | w_2 \rangle w_2$

$\langle v | w_2 \rangle = \langle (4,3) | \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1) \rangle$; $\langle v / w_1 \rangle = \langle (4,3) ; \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2) \rangle$; $[v]_B = \begin{pmatrix} \langle v | w_1 \rangle \\ \langle v | w_2 \rangle \end{pmatrix}$

(1) $\langle v | w_2 \rangle = \frac{5}{\sqrt{3}}$; $\langle v | w_1 \rangle = \frac{14}{\sqrt{6}}$

$[v]_B = \left(\frac{14}{\sqrt{6}} ; \frac{5}{\sqrt{3}}\right)$

السؤال الرابع : [6 درجات]

لتكن $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & -9 & 12 & 9 \end{bmatrix}$

(1) أوجد الصيغة الصفية الدرجية المختزلة للمصفوفة A .
(2) عين rank(A) و nullity(A)
(3) عين اساسا لفضاء الصفوف Row(A)
(4) بين فيما إذا كانت A لها معكوس أم لا علل إجابتك.

$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -5 & 3 \\ 3 & -9 & 12 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 18 & -25 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (1)

(3) $\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) nullity A + rank A = عدد الأعمدة ، باستخدام مبرهنة البعد ، rank A = 3 (2)
فنستنتج أن nullity A = 1

(1) Row A = $\langle (1,0,0,1) ; (0,1,0,-2/3) ; (0,0,1,0) \rangle$ (3)

(1) $|A| = 0$ لأن A ليس لها معكوس (4)

السؤال الخامس [6 درجات]

ليكن $T:R^3 \to R^3$ تحويلا خطيا معرفا بالقاعدة: $T(x,y,z)=(x+2y+z, 2x-y+2z, 3x+y+3z)$ وليكن $S=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ الأساس القياسي في R^3 .

1) عين مصفوفة التحويل الخطي $[T]_S$

2) عين الصيغة الصفية الدرجية المختزلة للمصفوفة $[T]_S$

3) إستنتج $rank(T)$ و $nullity(T)$

4) عين أساسا للفضاء $\ker(T)$

$T(1,0,0)=(1,2,3)$ ①

$T(0,1,0)=(2,-1,1)$

② $T(0,0,1)=(1,2,3)$

$$[T]_S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 3\end{pmatrix}$$ عامر

(1,5) ② $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) ③ من خلال الصيغة الدرجية المختزلة لـ $[T]_S$

فإن $Rank\ T = 2$ و $nullity\ T = 1$ (مبرهنة البعد)

$$\ker T = \{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ T(X) = 0 \}$$ ④

(1,5) نأخذ $X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker T$ فإن $\begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases}$

$$X = (x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$$

$$\ker T = \langle (1, 0, -1) \rangle$$

السؤال السادس: [7 درجات]

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(1) أثبت أن القيم المميزة المختلفة للمصفوفة A هي 1 و 3- و 3.
(2) أثبت أن A قابلة للإستقطار.
(3) عين مصفوفة P بحيث $P^{-1}AP$ تكون مصفوفة قطرية.
(4) إستخدم من الفقرة (1) لإيجاد $\det(A^n)$ لكل عدد صحيح n.

(1) القيم المميزة لـ A هم جذور للمعادلة المميزة

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & -1 \\ 0 & (1-\lambda) & 0 \\ -5 & 0 & (-2-\lambda) \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} (1-\lambda) & 0 \\ 0 & (-2-\lambda) \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & (1-\lambda) \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

(1)

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(1-\lambda)(-2-\lambda) - 5(1-\lambda)$$
$$= (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(-2-\lambda) - 5\right]$$
$$= (1-\lambda)\left[-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 - 5\right]$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 9) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-3)$$

إذن القيم المميزة لـ A هي 1 , 3 و 3-.

(1)

(2) بما أن جميع القيم المميزة لـ A هي مختلفة فإن A هي قابلة للاستقطار.

(3) الفضاء المميز E_1 المقابل للقيمة المميزة $\lambda = 1$

$$E_1 = \{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - I)X = 0 \}$$

نأخذ $X \in E_1$, إذن

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -5x - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ -8z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = z = 0$$

(1) $E_1 = \{ (0, y, 0) \ / \ y \in \mathbb{R} \}$

$E_1 = \langle 0, 1, 0 \rangle$

• الفضاء المميز E_3 المقابل للقيمة المميزة $\lambda = 3$ هو:

$$E_3 = \{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A - 3I)X = 0 \}$$

نأخذ $X \in E_3$ فإن:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - z = 0 \\ -2y = 0 \\ -5x - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

$$X(x, 0, -x) = x(1, 0, -1)$$

(1) $E_3 = \langle (1, 0, -1) \rangle$

• الفضاء المميز E_{-3} المقابل للقيمة المميزة $\lambda = -3$ هو:

$$E_{-3} = \{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A + 3I)X = 0 \}$$

نأخذ $X \in E_{-3}$ فإن:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - z = 0 \\ 4y = 0 \\ -5x + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5x \\ y = 0 \end{cases}$$

$$X = (x, 0, 5x) = x(1, 0, 5)$$

(1) $E_{-3} = \langle (1, 0, 5) \rangle$

(1) إذا، $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

(4) لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا: $\det D^n = \det A^n$ إذن:

(1) $\det A^n = 1 \times 3^n \times (-3)^n = (-1)^n 3^{2n}$.